早稲田大学大学院　基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

A study on a discrete velocity model of the system of particles with a doubly nonlinear evolution equation as a scaling limit

二重非線形発展方程式をスケール極限に持つ粒子系の離散速度モデルの研究

申　請　者

Hironari	MIYOSHI
三好	啓也

数学応用数理専攻・非線形システム研究

2018 年 2 月

本論文の研究テーマは Boltzmann 方程式を簡略化した粒子系離散モデルの解析である．1872 年 Boltzmann は気体分子の運動について次の形の微分方程式を提唱した：

$$\partial f/\partial t + v \cdot \nabla_x f = F[f,f](x,v,t),$$

ここで $x \in R^3$ は空間変数，$t \in R$ は時間変数，$f = f(x,t,v)$ は (x,t) における速度 v で運動する粒子数密度，$F[f,f]$ は衝突項と呼ばれる非線形項である．一般に $F[f,f]$ は特異性を伴うため，Boltzmann 方程式の解析は困難を伴ってきた．1960 年代に入り，Grad による衝突項の近似が提起されて以来研究が進展し，2008 年頃からは Alexsandre, Ukai, Morimoto らのグループにより，衝突項を近似しない解析手法が確立されてきた．

一方 Boltzmann 方程式自体の解析に困難が伴うため，簡略版である離散モデルが考案されてきた．これは粒子の取り得る速度が有限個であると仮定するモデルである．その最も簡単なケースは粒子が正反対の 2 方向の速度しかとらないと仮定した場合である．1 次元空間において速度 1 で運動する粒子数密度を u，速度 -1 で運動する粒子数密度を v とする．このとき 2 速度モデルは $x \in R$ を空間変数，$t \in R$ を時間変数として

$$u_t + u_x + k(u,v,x)(u-v) = 0, \quad v_t - v_x - k(u,v,x)(u-v) = 0$$

と表される．ここで $k(u,v,x)$ は衝突の様子を記述する関数である．1930 年代に Carleman は $k(u,v,x) = u+v$ の形の 2 速度モデルを提起した．これは実験結果とよく合うため関心を集め，Carleman モデルと呼ばれている．2 速度モデルについては，$k(u,v,x) = (u+v)^\alpha$ とした α 次 Carleman モデルに対する Pulvirenti, Toscani, P.L.Lions らの研究，$k(u,v,x) = |u-v|^\beta$ とした M.Tsutsumi の研究が挙げられる．2 速度モデルに対する数学的考察としては，初期値問題あるいは初期値境界値問題として解の存在や一意性などを議論することが基本的課題である．2 速度モデルについてもう一つの重要なテーマは流体力学的極限の考察である．気体分子運動論において平均自由行程を，粒子が他の粒子に衝突しないで移動できる距離の平均と定義する．平均自由行程をパラメータ ε のべき乗で表し，u, v に適当なスケール変換を施した方程式系を考える．$\varepsilon \to 0$ の極限操作により，粒子の運動を記述したミクロな方程式系が，連続流体を記述するマクロな方程式に移行すると考えられる．数学的にはスケール変換した方程式系の解を $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ とするとき， 全体の粒子数密度 $\rho_\varepsilon = u^\varepsilon + v^\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ の下での振る舞いを考察することが重要となる，

2 速度モデルは Boltzmann 方程式の簡略版であるが，上述のように数学的にも物理的も興味深いテーマを含む方程式系である．本論文において申請者は．従来研究されてきた 2 速度モデルを包含する，次のような一般化された Carleman モデルを取り扱っている：

$$u_t + u_x + (u+v)^\alpha |u-v|^\beta (u-v) = 0, \;\; v_t - v_x - (u+v)^\alpha |u-v|^\beta (u-v) = 0, \quad \text{ただし} \;\; \alpha \in R, \beta > -1. \quad (1)$$

この非線形双曲型方程式系の初期値境界値問題に対する可解性，およびスケール変換の下での流体力学的極限の考察が主たる研究テーマである．論文は全 3 章から成立しており，以下各章の内容とその評価について述べる．

第 1 章は論文の導入部分であり，Boltzmann 方程式に対する 2 速度モデル研究の歴史的経緯と本研究の位置付けが述べられている．

第 2 章は一般化された Carleman モデルに対する初期値境界値問題の可解性がテーマである．(1) を 1 次元区間 $0 < x < 1$ において境界条件

$$u(0,t) = a(t), \;\; v(1,t) = b(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

および初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; v(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

の下で考える．ここで $a(t), b(t), u_0(x), v_0(x)$ は与えられた非負値関数である．まず斉次境界条件 $a(t) \equiv 0, b(t) \equiv 0$ の場合，申請者は非線形半群の理論を適用して初期値境界値問題 (1)-(3) の解を構成することに挑んでいる．$L^1(0,1) \times L^1(0,1)$ における非線形作用素 $B_{\alpha,\beta}$ とその定義域 $D(B_{\alpha,\beta})$ を

$$\begin{aligned} &B_{\alpha,\beta}(u,v) = (-u_x - h(u,v), v_x + h(u,v)), \qquad \text{ただし} \;\; h(u,v) = (u+v)^\alpha |u-v|^\beta (u-v), \\ &D(B_{\alpha,\beta}) = \{(u,v) \in W^{1,1}(0,1) \times W^{1,1}(0,1); \;\; u,v \geq 0 \;\text{ in }\; (0,1), \; u(0) = v(1) = 0\} \end{aligned} \tag{4}$$

によって定める．ここで指数 α, β の動く範囲について次の条件をおく：

$$\Delta = \{(\alpha, \beta) \in R^2; \quad -(\beta+1) < \alpha \leq \min\{\beta+1, 1\}\}.$$

このとき次の定理が証明されている．

定理 1. $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $u_0, v_0 \in L^1_+(0,1) := \{u \in L^1(0,1);\ u \geq 0 \ \text{ in } \ (0,1)\}$ とする．このとき非線形半群

$$U(t)(u_0, v_0) = \lim_{\lambda \to +0} (I - \lambda B_{\alpha,\beta})^{-[t/\lambda]} (u_0, v_0) \in C([0,\infty);\ L^1_+(0,1) \times L^1_+(0,1)) \tag{5}$$

が存在し，$(u(t), v(t)) = U(t)(u_0, v_0)$ は (1)-(3) の弱解となる．

Crandall-Liggett の理論により，(a) $B_{\alpha,\beta}$ が $L^1(0,1) \times L^1(0,1)$ における閉消散作用素であること，(b) 任意の $\lambda > 0$ に対して $R(I - \lambda B_{\alpha,\beta}) \supset L^1_+(0,1) \times L^1_+(0,1) (= \overline{D(B_{\alpha,\beta})})$ を満たすこと，これら二つの条件を満たせば $B_{\alpha,\beta}$ は (5) で定義される非線形半群を生成することが知られている．したがって定理 1 の証明のポイントは，$B_{\alpha,\beta}$ がこれらの条件を満たすのを示すことにある．申請者は指数の領域 Δ をさらに 3 つの部分領域に分割し．上記二つの条件を巧みな工夫を用いて証明している．とりわけ，値域条件の証明には (α, β) の部分領域ごとに Banach の不動点定理や Schauder の不動点定理が適用されるなど巧妙な議論が展開されている．申請者の解析手法は $\beta = 0$ における既知の証明技法を大きく拡張したものであり，その意義は大きい．

斉次境界条件の場合の (1)-(3) について，初期値が滑らかな場合に $u_0, v_0 \in W^{1,1}(0,1)$ を満たせば，$\alpha+\beta \geq 0, \beta \geq 0$ の下での強解の存在定理も証明されている．

境界条件 (2) において $a(t) \not\equiv 0, b(t) \not\equiv 0$ を満たす場合の解析も重要である．このとき非線形作用素について (4) における定義域が次のように t とともに変化するため，$B_{\alpha,\beta}$ を $B_{\alpha,\beta}(t)$ に改める必要がある：

$$D(B_{\alpha,\beta}(t)) = \{(u,v) \in W^{1,1}(0,1) \times W^{1,1}(0,1);\quad u, v \geq 0 \ \text{ in } \ (0,1),\ u(0) = a(t),\ v(1) = b(t)\}$$

こうして $B_{\alpha.\beta}(t)$ を定義し，申請者は Crandall-Pazy の理論を適用して非線形発展作用素を構成，次の定理を示すことに成功している．

定理 2. $(\alpha, \beta) \in \Delta, (u_0, v_0) \in L^1_+(0,1) \times L^1_+(0,1)$ とする．このとき $L^1_+(0,1) \times L^1_+(0,1)$ における非線形発展作用素

$$U(t,s)(w,z) = \lim_{m \to \infty} \prod_{i=1}^{m} \left(I - \frac{t-s}{m} B_{\alpha,\beta}\left(s + \frac{i(t-s)}{m}\right)\right)^{-1} (w,z), \quad (w,z) \in L^1_+(0,1) \times L^1_+(0,1),$$

が存在し，$(u(t), v(t)) = U(t,0)(u_0, v_0)$ は (1)-(3) の弱解となる．

定理 2 は，応用上重要な非斉次境界値問題について，初期値および境界値についてできるだけ緩やかな条件の下，弱解の存在を示す価値ある結果である．この定理の証明には斉次境界値問題の解析の際に展開された技法・アイデアが効果的に利用されている．また，初期値，境界値に滑らかさが加われば，強解の存在が示されることも斉次境界条件のケースと同様である．

第 3 章のテーマは (1)-(3) の解 (u, v) に対する流体力学的極限の研究である．簡単のため $a(t) \equiv 0, b(t) \equiv 0$ として考える．スケール極限のパラメータ $\varepsilon > 0$ を用いて変換

$$u^\varepsilon(x,t) = u(x/\varepsilon^{\beta+1}, t/\varepsilon^{\beta+2}), v^\varepsilon(x,t) = v(x/\varepsilon^{\beta+1}, t/\varepsilon^{\beta+2})$$

を施すと，$(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ は次のシステムを満たす：

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t + u^\varepsilon_x/\varepsilon + (u^\varepsilon + v^\varepsilon)^\alpha/\varepsilon \cdot |(u^\varepsilon - v^\varepsilon)/\varepsilon|^\beta (u^\varepsilon - v^\varepsilon)/\varepsilon = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v^\varepsilon_t - v^\varepsilon_x/\varepsilon - (u^\varepsilon + v^\varepsilon)^\alpha/\varepsilon \cdot |(u^\varepsilon - v^\varepsilon)/\varepsilon|^\beta (u^\varepsilon - v^\varepsilon)/\varepsilon = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(0,t) = v^\varepsilon(1,t) = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(x,0) = u^\varepsilon_0(x), \quad v^\varepsilon(x,0) = v^\varepsilon_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{6}$$

ただし $u_0^\varepsilon(x)=u_0(x/\varepsilon^{\beta+1})$, $v_0^\varepsilon(x)=v_0(x/\varepsilon^{\beta+1})$ である．このとき $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ の代わりに新しく $\rho_\varepsilon=u^\varepsilon+v^\varepsilon, j_\varepsilon=(u^\varepsilon-v^\varepsilon)/\varepsilon$ を定義すると，$\rho_\varepsilon, j_\varepsilon$ は次の関係式を満たす：

$$(\rho_\varepsilon)_t+(j_\varepsilon)_x=0,\quad \varepsilon^2(j_\varepsilon)_t+(\rho_\varepsilon)_x+2\rho_\varepsilon^\alpha|j_\varepsilon|^\beta j_\varepsilon=0.$$

ここで $\varepsilon\to 0$ とするとき適当な位相で $\rho_\varepsilon\to\rho$, $j_\varepsilon\to j$ が示されれば，ρ, j は

$$\rho_t+j_x=0.\ \ \rho_x+2\rho^\alpha|j|^\beta j=0$$

を満たすことが推測されるため，ρ の満たすべき方程式が導かれる，というのが基本アイデアである．この方針の下で申請者は次の定理の証明に成功している．

定理 3． $u_0, v_0\in L_+^\infty(0,1), (\alpha,\beta)\in\Delta$ の下で $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ を (6) の強解とする．このとき任意の $p>1, T>0$ に対して $\varepsilon\to 0$ のとき $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ から適当な部分列を選べば，極限関数 ρ に $L^p((0,1)\times(0,T))$ の位相で収束し，ρ は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{1/(\beta+1)}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x}\rho^{1-\alpha}\right|^{-\beta/(\beta+1)}\frac{\partial}{\partial x}\rho^{1-\alpha}\right\}=0 \qquad \text{if}\quad -(\beta+1)<\alpha<1, \tag{7}$$

または

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/(\beta+1)}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x}\log\rho\right|^{-\beta/(\beta+1)}\frac{\partial}{\partial x}\log\rho\right\}=0 \qquad \text{if}\quad \alpha=1, \tag{8}$$

を超関数の意味で満たす.

定理 3 において，粒子数密度 ρ_ε の極限関数 ρ が満たす方程式として非線形拡散方程式の導かれる点が非常に興味深い．$\beta=0$ のとき (7) は多孔質媒体 (porous medium) の方程式，(8) は対数拡散型方程式となり，$\alpha=0$ のとき (7) は p-Lapalcian 型方程式となる．$\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ の場合，(7),(8) は二重の非線形性を伴う発展方程式であり，新しい形の非線形拡散方程式である．定理 3 を示すためには $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ に関する評価が重要であり，次の形のエントロピー関数

$$H(u,v)=\frac{1}{p}\int_0^1(u^p+v^p)dx,\quad p>1,$$

が，$\rho_\varepsilon=u^\varepsilon+v^\varepsilon$, $j_\varepsilon=(u^\varepsilon-v^\varepsilon)/\varepsilon$ を評価する際に利用される．申請者はこれらの評価とコンパクト性に関する結果，単調作用素の議論などをうまく組み合わせて定理 3 を証明している．

以上述べてきたように，申請者は離散速度モデルに由来する，一般化された Carleman モデルについて，極めて精緻な研究を行っている．とくに流体力学的極限として導かれた二重非線形性を伴う発展方程式は，今後の研究が待たれる新しい素材である．また本論文のなかで展開されている理論・技法は非線形半群の理論，発展方程式論，エネルギー法など多岐にわたり，問題解決のためのアイデア・工夫は巧妙である．よって，本論文は粒子系の離散速度モデルの研究に大きく貢献しており，博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．

2017 年 12 月

審査員

（主査）	早稲田大学教授	理学博士（名古屋大学）	山田 義雄
	早稲田大学名誉教授	理学博士（早稲田大学）	堤　正義
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	石井　仁司
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	小林　和夫
	早稲田大学教授	博士（工学）早稲田大学	豊泉　洋